UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Estabilidad de sistemas lineales en tiempo continuo

Stability of Linear Systems in Continuous Time

Argenis Alexander Ángel Sáez [1]

Resumen:
El presente trabajo tiene como propósito analizar la estabilidad absoluta de sistemas de control lineales en tiempo continuo que se basan en el criterio de estabilidad de Routh y de la ganancia límite. Para esto se proporcionan las teorías asociadas de estabilidad en función a las raíces de ecuación característica (polos en lazo cerrado), así como el efecto de la variación de un parámetro de ganancia cuando se entona un controlador PID de forma analítica, es decir, si se conocen los modelos matemáticos de la planta y utilizando las relaciones dadas por Ziegler-Nichols. Se emplea Simulink de Matlab para observar de forma gráfica las respuestas de sistemas que son estables o no y cómo influye el controlador PID diseñado por el método de la ganancia límite en la trayectoria de lazo cerrado de un sistema de control.

Palabras clave: Criterio de estabilidad, ecuación característica, estabilidad absoluta, ganancia límite, sistema de control

Abstract:
The aim of this work is the analysis of the absolute stability of linear control systems in continuous time, based on the criterion of Routh's stability and the ultimate gain. To achieve this, we reviewed the theories associated to stability as a function of the roots of the system characteristic equation (closed-loop poles), as well as the effect on the variation of a gain parameter when a PID controller is analytically tuned by Ziegler-Nichols's relations, once mathematical models of the plant are known. The application of Matlab Simulink was used to graphically observe whether the shape of the systems response is stable or not and to observe as well how the PID controller, tuned by the ultimate gain method, influences on the closed-bond trajectory in a control system.

Keywords: Criterion of stability, characteristic equation, absolute stability, ultimate gain, control system

[1] *Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora, Ingeniero Electrónico, https://orcid.org/0009-0004-0274-0333*
Autor de correspondencia: aalexangelsaez@gmail.com

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Introducción

El criterio de estabilidad de Routh proporciona una prueba satisfactoria a la estabilidad absoluta. Sin embargo, dicho teorema presenta limitaciones para el análisis de un sistema de control lineal, "sobre todo porque no sugiere cómo mejorar la estabilidad relativa ni cómo estabilizar un sistema inestable. Sin embargo, es posible determinar los efectos de cambiar uno o dos parámetros de un sistema si se examinan los valores que producen inestabilidad" (Ogata, 2003, p. 237)

Lo ideal es conseguir un modelo matemático de la planta, con el cual, podría ser posible diseñar diversas técnicas y aplicarlas en el sistema, con la finalidad de establecer parámetros del controlador cumpliendo las especificaciones del estado transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado (Ogata, 2003)

El método de la ganancia límite permite obtener un valor K_U en el cual las oscilaciones de la respuesta de un sistema son de amplitud constante o sostenidas y es aquí donde dicha metodología tiene relación con el criterio de estabilidad de Routh, dado que esto se produce cuando existen polos de lazo cerrado sobre el eje imaginario del plano *s*, lo que se traduce en un valor 'cero' en la columna principal del arreglo de Routh. En el análisis de los sistemas lineales suelen utilizarse funciones de transferencia como modelos matemáticos que generalmente se obtienen de las ecuaciones diferenciales dinámicas que describen el comportamiento del sistema, haciendo énfasis en las entradas y salidas del proceso en estudio.

La función de transferencia de un sistema *G(s)* descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero Ogata, K. (2003).

$$G(s) = \left(\frac{L\{Salida\}}{L\{Entrada\}} \middle| C.I. = 0\right) \tag{1}$$

Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \overset{(n)}{y} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \overset{(m)}{x} + b_{m-1} \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_1 \dot{x} + b_0 x \tag{2}$$

En donde ***y*** es la salida del sistema y ***x*** es la entrada. La función de transferencia de este sistema se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación (1) en forma independiente, con la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero y se obtiene:

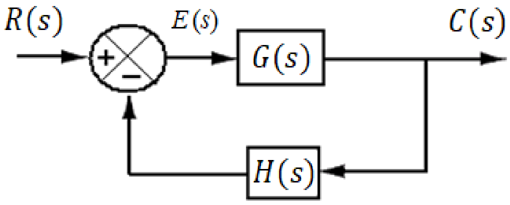
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707
Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Utilizando este concepto de función de transferencia se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en ***s.*** Si la potencia más alta de ***s*** en el denominador de (2) es ***n*** se dice que el sistema es de orden ***n***.
Considere el sistema de lazo cerrado de la figura1

Figura 1

Diagrama de control de lazo cerrado



La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (4)$$

Siendo la ecuación característica del sistema

$$1 + G(s)H(s) = 0 \qquad (5)$$

Por otro lado, la señal de error se obtiene mediante

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s) \qquad (6)$$

Estabilidad

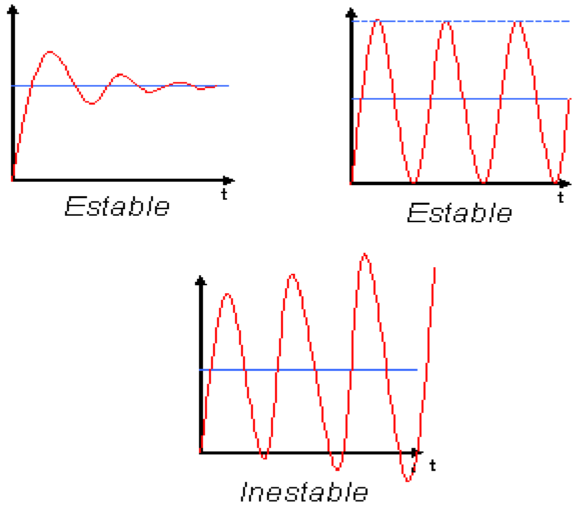
Un sistema es estable si responde en forma limitada a una excitación limitada tal como un impulso unitario (Llata y Gonzalez, 2021). Un sistema estable es aquel en que los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes del tiempo.

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Figura 2

Respuestas transitorias



Para esto sólo es necesario calcular las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema (ecuación característica), y comprobar su posición en el plano complejo s, para saber si el sistema es estable y cómo afecta cada una de las raíces.

En este sentido se sugiere que los coeficientes de *t* en los términos exponenciales de la respuesta transitoria (soluciones de la ecuación diferencial en el dominio del tiempo que caracteriza al sistema) sean números reales negativos o números complejos con parte real negativa. Esto implica que para que un sistema sea estable las raíces de la ecuación característica deben ser negativas o con parte real negativa. Esto es ya que la ecuación característica representa la parte transitoria (homogénea) de la ecuación que rige el sistema. De lo anterior se puede decir que la estabilidad no depende de la entrada, sino que es una característica propia del sistema.

Metodología

El presente estudio corresponde al tipo de investigación descriptiva – analítica, debido a que se realiza según el análisis y alcance de los resultados obtenidos y metodología de enfoque cuantitativo donde los resultados se obtienen mediante cálculos y simulaciones sustentadas en las teorías existentes del tema. El estudio aplica los métodos del criterio de estabilidad de Routh y de la ganancia límite.

Criterio de Estabilidad Routh

Es un método que se emplea para determinar si la ecuación característica tiene o no raíces con parte real positiva sin necesidad de determinar el valor preciso de

UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

estas raíces Smith, C. (2008). Como casi todos los sistemas lineales en lazo cerrado tienen funciones de transferencia para $n \geq m$ de la forma dada en la ecuación (2)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

La ecuación característica de este sistema viene dada mediante:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (6)$$

El criterio de estabilidad de Routh, permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano *s*. El procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

1. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz, o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. En tal caso, el sistema no es estable. Si sólo interesa la estabilidad absoluta, no es necesario continuar con el procedimiento.
2. Si todos los coeficientes son positivos, se ordenan los coeficientes del polinomio en renglones y columnas de acuerdo con el patrón o arreglo siguiente que se muestra en la tabla 1:

Figura 3

Arreglo de Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
s^{n-3}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
s^{n-4}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s^0	a_0	0	0	0

Donde: $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$: son los coeficientes de la ecuación característica. El resto de los coeficientes se obtienen mediante las relaciones:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta que solo se obtengan ceros. El criterio de Routh dice que:

- Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh tienen el mismo signo.
- De lo contrario el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo.
- Si existe un cero no terminal el sistema tiene un par de raíces imaginarias puras.
- Si existen ceros terminales implica una raíz cero.

El criterio de estabilidad de Routh no sugiere cómo mejorar la estabilidad relativa ni cómo estabilizar un sistema inestable. Sin embargo, es posible determinar los efectos de cambiar uno o dos parámetros de un sistema si se examinan los valores que producen inestabilidad.

Método de la Ganancia Límite

Si se conoce la función de transferencia de la planta, se puede calcular la respuesta escalón unitario o la ganancia límite K_U y el periodo límite T_U. Para esta regla se establece que $\boldsymbol{T_i} = \infty$ y $\boldsymbol{T_d} = 0$, usando sólo la acción de control proporcional. Se incrementa el valor de Kp de 0 a un valor crítico $\boldsymbol{K_U}$ en donde la salida exhiba primero oscilaciones sostenidas. (Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar ***Kp,*** no se aplica este método).

En la práctica con el controlador en automático (lazo cerrado), se incrementa la ganancia proporcional (o se reduce la banda proporcional), hasta que el sistema oscila con amplitud constante; se registra el valor de la ganancia con que se produce la oscilación sostenida como K_U. Este paso se debe efectuar con incrementos discretos de la ganancia, alterando el sistema con la aplicación de pequeños cambios en el punto de control (consigna a cada cambio en el establecimiento de la ganancia).

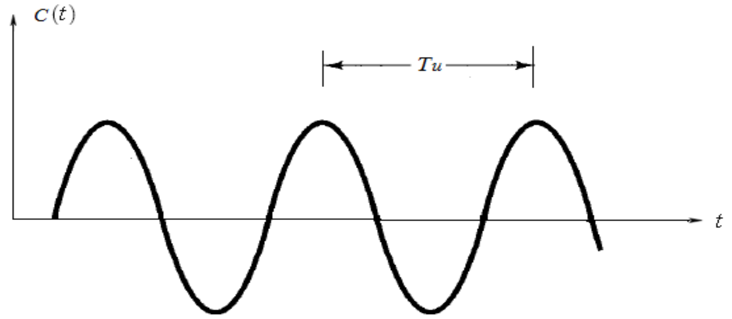
Los incrementos de la ganancia deben ser menores conforme ésta se aproxime a la ganancia límite.

Por tanto, la ganancia límite $\boldsymbol{K_U}$ y el periodo $\boldsymbol{T_U}$ correspondiente se determinan también experimentalmente

UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA ISSN 2953 6707
Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Figura 4

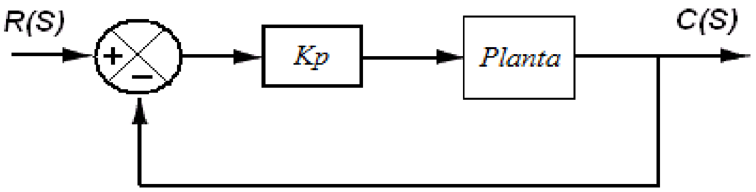
Salida con oscilaciones sostenidas



Esquema de flujo para el calculo de la onda tomando en cuenta la constante y el proceso descrito.

Figura 5

Sistema de control sólo proporcional con realimentación unitaria



Acción de control proporcional – integral – derivativa (PID).

Viene dada como la combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa (la salida del controlador es proporcional al error, a su derivada y a su integral). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. Ogata, K. (2003). Si *e*(*t*) es la señal de error en el dominio del tiempo, la ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)dt + K_p T_d \frac{d}{dt}\big(e(t)\big) \tag{7}$$

O bien

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{d}{dt}\big(e(t)\big) \tag{8}$$

Donde T_i y T_d corresponden a los tiempos integral y derivativo, mientras que K_p, K_i y K_d son las ganancias Proporcional, Integral y Derivativa respectivamente.

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Conocidos los parámetros T_U y K_U bien sea experimentalmente o por medio del análisis de la ecuación característica del sistema en conjunto con el estudio de la estabilidad en lazo cerrado, se emplean las ecuaciones dadas en la tabla 2 por Ziegler-Nichols para el ajuste del controlador.

Tabla 6.

Ecuaciones de Ziegler-Nichols

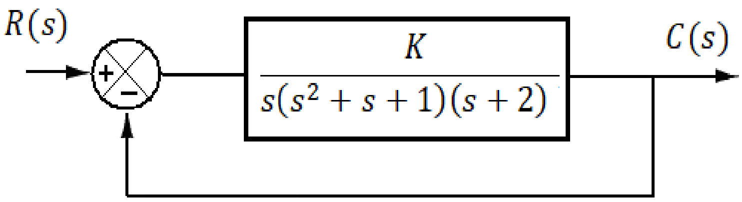
	K_p	T_i	T_d
P	$0.5\,K_u$		
PI	$0.45\,K_u$	$\frac{T_u}{1.2}$	
PID	$0.6\,K_u$	$\frac{T_u}{2}$	$\frac{T_u}{8}$

Resultados y discusión

Aplicación del criterio de estabilidad de Routh al análisis de un sistema de control.

Figura 7

Considerando el sistema con realimentación unitaria de la figura



Debe existir un rango de valores de *K* para la estabilidad de dicho sistema. En este sentido la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

Siendo la ecuación característica del sistema

UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA ISSN 2953 6707
Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

$$1+\frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)}=0$$

O bien

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de coeficientes para el criterio de estabilidad de Routh es como sigue

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$^7/_3$	K	
s^1	$2-{}^9/_7K$		
s^0	K		

Para la estabilidad

$$K > 0, \qquad 2 - {}^9/_7K > 0$$

Donde

$$0 < K < {}^{14}/_9$$

Con este análisis se puede determinar que los valores de la ganancia *K* que garantizan una respuesta amortiguada o de oscilaciones sostenidas se encuentran en el intervalo (0, $^{14}/9$)

Empleo de simulink de matlab para el estudio de la estabilidad en un sistema de control

Simulink es una toolbox especial de matlab que se emplea para simular el comportamiento de los sistemas dinámicos tanto lineales como no lineales, modelos en tiempo continuo, tiempo discreto y sistemas híbridos. Es un entorno gráfico en el cual el modelo a simular se construye tomando los elementos disponibles en las librerías de simulink y arrastrando los diferentes bloques que lo constituyen. Los modelos simulink se guardan en ficheros con extensión *.mdl.

Tomando el ejemplo anterior donde la estabilidad se logra para valores de la ganancia entre **0 y $^{14}/_9$**; además teniendo en cuenta que

$$s(s^2+s+1)(s+2) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s$$

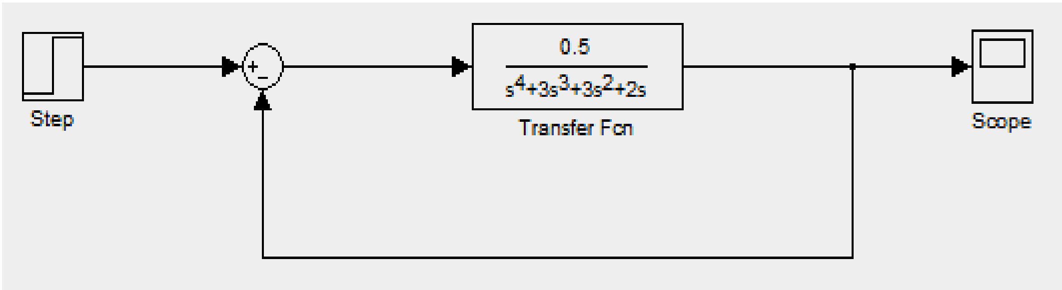
Se implementan los módulos que simulan el comportamiento del sistema para *K* = 0.5

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Figura 8

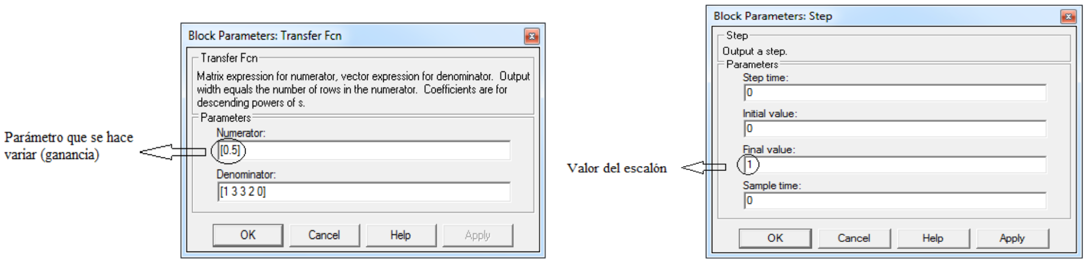
Diagrama de función



En el módulo Transfer Fcn se ejecuta la función de transferencia de lazo abierto del presente sistema de cuarto orden, cuyos parámetros de entrada se introducen como se muestra en la siguiente figura. Se usa como referencia un escalón unitario dado que es la señal por excelencia en este tipo de pruebas, y a la salida se conecta el osciloscopio virtual que permite observar la señal de salida o respuesta del sistema al escalón

Figura 9

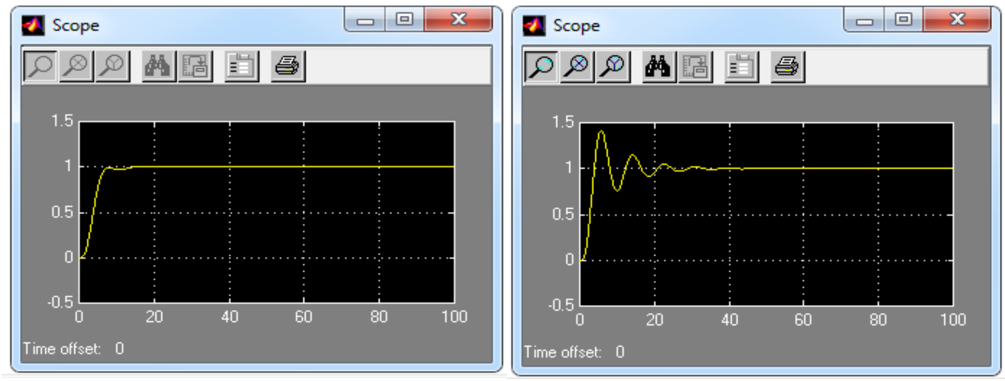
Rangos de programación



Cambiando ahora *K* para un par de valores que se encuentran en el rango de estabilidad resulta la siguiente grafica que se puede observar en la figura 10

Figura 10

Vista de la respuesta en el osciloscopio virtual de Simulink



K = 0.5 *K* = 1

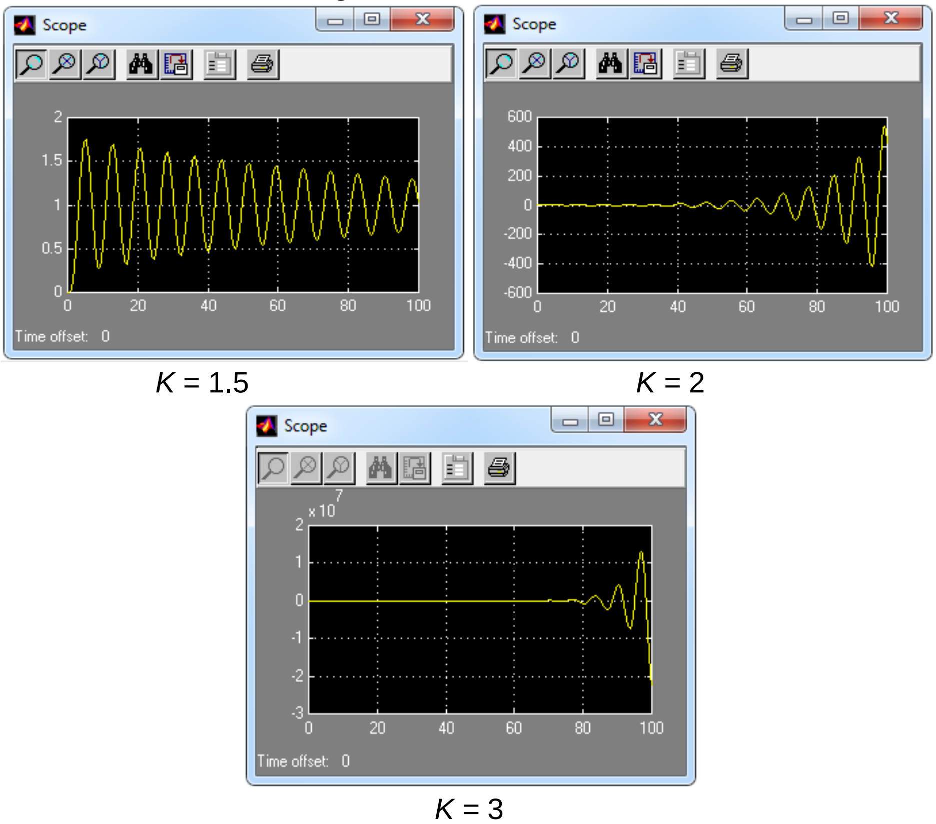
UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Al utilizar ahora valores de la ganancia fuera del rango estable se obtiene, en ambos casos las oscilaciones aumentan su amplitud conforme crece el tiempo, por lo tanto, el sistema se vuelve inestable, como se puede observar en la figura 11.

Figura 11

Simulación con valores fuera de rango

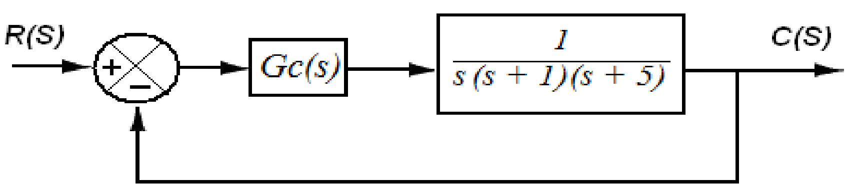


Determinación de la ganancia limite y entonación del controlador PID

En el sistema de la figura se tiene realimentación unitaria

Figura 12

Ecuación y diagrama



El proceso (Actuador – Planta) viene representado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Haciendo ***Gc(s) = K_p***, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

Donde la ecuación característica es

$$1 + G_c(s)G(s) = 0$$

Resultando la ecuación de tercer orden

$$s^3 + 6s^2 + 5s + Kp = 0$$

Aplicando el arreglo de Routh se obtiene

s^3	1	5
s^2	6	Kp
s^1	$(30 - Kp)/6$	
s^0	Kp	

De la primera columna del arreglo se deduce que la **ganancia límite** para la oscilación sostenida es

$$Kp = K_U = 30$$

Con esto la ecuación característica se convierte en

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

Para encontrar la frecuencia de la oscilación sostenida (frecuencia límite), se sustituye s = *jω* en la ecuación característica:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

Separando las partes real e imaginaria resulta

$$(30 - 6\omega^2) + (5 - \omega^2)\, j\omega = 0$$

Por lo tanto se tiene que $\omega^2 = 5$ o bien $\omega = 2.24$, El período de la oscilación sostenida (período límite) se obtiene mediante

$$Tu = {}^{2\pi}/_{\omega} = {}^{2\pi}/_{2.24} = 2.8$$

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

En cuanto a los parámetros del controlador PID se emplean las ecuaciones dadas por Ziegler-Nichols para el método de ganancia límite

$$Kp = 0.6\ Ku = 18$$
$$T_i = 0.5\ Tu = 1.4$$
$$T_d = 0.125\ Tu = 0.35$$

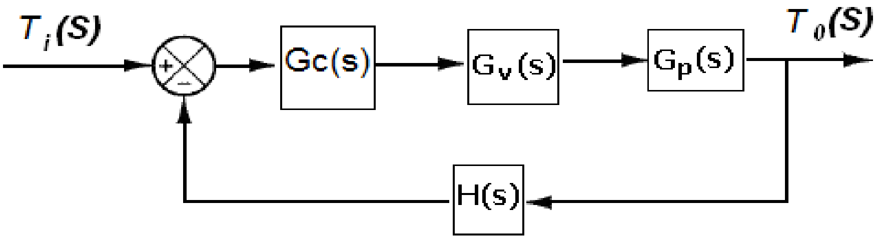
Suponga que se desea determinar la ganancia límite de un controlador de temperatura para un intercambiador de calor si el sistema presenta las siguientes características en los elementos de lazo cerrado:

Planta (Intercambiador)	Válvula	Sensor – Transmisor
$G_p(s) = \dfrac{50}{30\,s + 1}$	$G_v(s) = \dfrac{0.016}{3\,s + 1}$	$H(s) = \dfrac{1}{10\,s + 1}$

Considerando la disposición básica de los elementos en un bucle de control se tiene el sistema real

Figura 13

Proceso de calculo



Para este sistema, se escribe la ecuación característica en la forma

$$1 + G_c(s)G_V(s)G_P(s)H(s) = 0$$

Haciendo **Gc(s) = *Kp*** y sustituyendo el resto de los elementos se obtiene

$$1 + Kp.\frac{0.016}{3\,s + 1}.\frac{50}{30\,s + 1}.\frac{1}{10\,s + 1} = 0$$

Al efectuar los productos y simplificar resulta

$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 0.8Kp = 0$$

El arreglo de Routh es el siguiente

UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

s^3	900	43
s^2	420	$1 + 0.8\,Kp$
s^1	b_1	
s^0	$1 + 0.8\,Kp$	

Donde

$$b_1 = \frac{(420)(43) - 900(1 + 0.8\,K_p)}{420} = \frac{17160 - 720\,K_p}{420}$$

Para la estabilidad se requiere:

$$Kp \geq -1.25$$
$$17160 - 720\,Kp \geq 0 \text{ siendo } Kp \leq 23.8$$

Dado que la primera condición no satisface el criterio (una ganancia negativa significa que la acción del controlador no es la correcta), se toma la segunda condición esto es:

$$Kp = K_U = 23.8$$

Se hace s = $j\omega$ en la ecuación característica para encontrar la frecuencia de la oscilación sostenida

$$900(j\omega)^3 + 420(j\omega)^2 + 43(j\omega) + 1 + 0.8\,Kp = 0$$

Lo cual conduce al siguiente sistema

$$-420\omega^2 + 1 + 0.8\,Kp = 0$$
$$-900\omega^3 + 43\omega = 0$$

Con soluciones:

Para ω **=** $\boldsymbol{0}$ se obtiene $\mathbf{K_U = -1.25}$

Para ω **=** $\boldsymbol{0.218}$ *se* obtiene $\mathbf{K_U = 23.8}$

La primera solución implica que el sistema no oscila, si no que se mueve de forma monótona en una dirección u otra, por lo tanto el valor que interesa es $\omega = 0.218$

El período de la oscilación sostenida es entonces

$$Tu = {}^{2\pi}/_{\omega} = {}^{2\pi}/_{0.2186} = 28.7$$

Finalmente, los parámetros del controlador de temperatura (PID) son

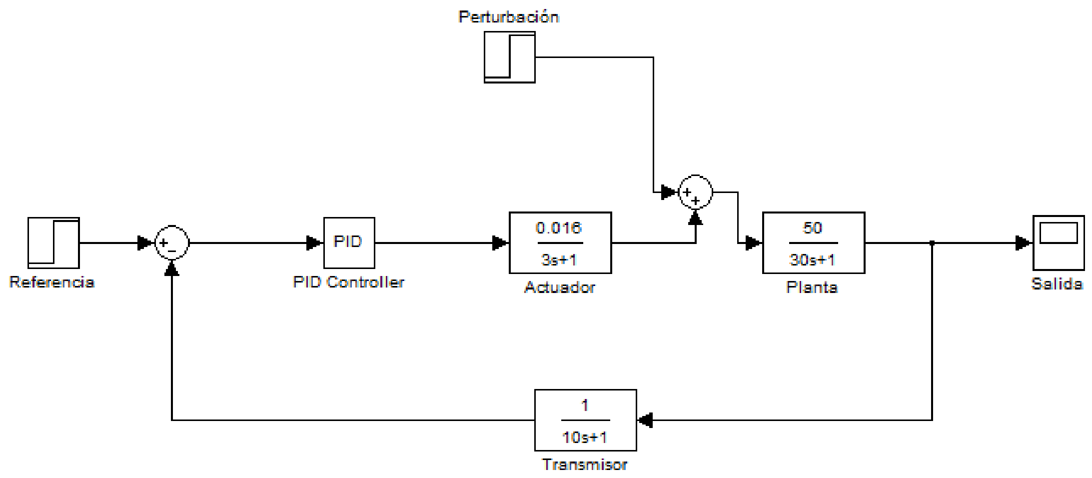
UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707
Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

$$Kp = 0.6\ Ku = 14.28;\ T_i = 0.5\ Tu = 14.35;\ T_d = 0.125\ Tu = 3.59$$

La implementación de este sistema en simulink de Matlab puede hacerse como

Figura 14

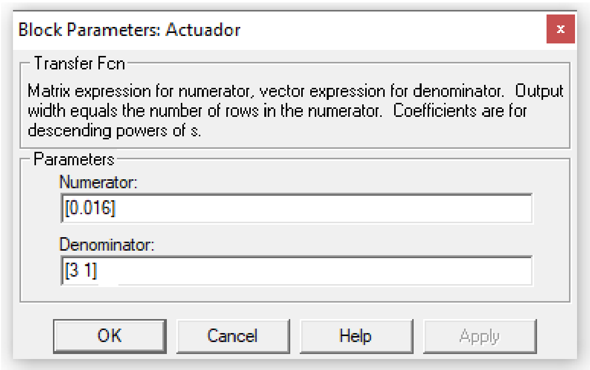
Diagrama de calculo



Aquí se utiliza la función escalón de 5 unidades tanto para la señal de referencia como para la perturbación. En el caso del actuador se emplea el módulo:

Figura 15

Ecuaciones de salida



De forma análoga se procede en los bloques de la planta y el transmisor. Por otro lado, simulink contiene un módulo para simular controladores PID, donde los parámetros que se solicitan son las ganancias Proporcional, Integral y Derivativa, en este sentido:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{14.28}{14.35} = 0.99$$

$$K_d = K_p T_d = (14.28)(3.59) = 51.26$$

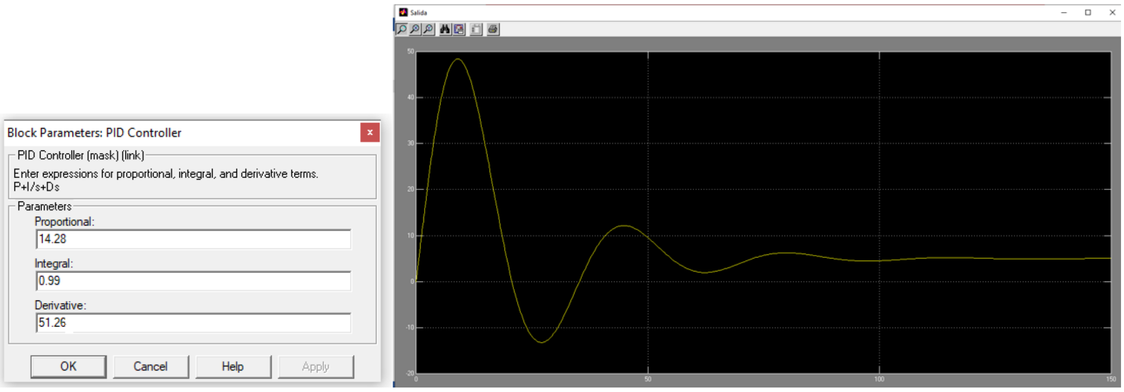
UNANCHAY REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

La ecuación presenta el proceso de cálculo, mientras que la figura 16 presenta el resultado y la grafica simulada en el programa, Una vez aplicados los valores de las ganancias.

Figura 16

Resultado de simulación



Se observa oscilaciones iniciales que son amortiguadas aproximadamente después de 100 segundos, llegando a estabilizarse en el valor 5 que corresponde a la referencia.

La variación de los niveles de ganancia en el intervalo válido para la estabilidad obtenido a partir del criterio de Routh, permitirá determinar el efecto positivo o negativo de dicha variación lo cual suele considerarse en aplicaciones de diseño de sistemas de control de forma general; así mismo conocidos los valores de la ganancia límite, el período y frecuencia límites se puede ajustar un controlador PID por medio de las ecuaciones de Ziegler-Nichols que permita mantener regulado el sistema para un valor de referencia establecido.

La implementación de los sistemas lineales en simulink de matlab permiten observar respuestas condicionadas a valores de la ganancia considerada y estimar la duración los transitorios, así como el tiempo en que se produce el régimen permanente en respuestas subamortiguadas. Así mismo se pueden apreciar las salidas con oscilaciones obtenidas (sinusoides no amortiguadas) que ocurren en la ganancia límite y que a partir de la misma el sistema se vuelve inestable exhibiendo oscilaciones crecientes en amplitud.

Cabe destacar que la utilización del *PID Controller* de simulink permite verificar el comportamiento del sistema introduciendo correctamente en el bloque virtual los valores de las ganancias proporcional, integral y derivativa obtenidas en los cálculos manuales. Para valores correctos el controlador mantendrá los niveles de la salida en valores convergentes a la señal de referencia que para efectos de simulación se usó un escalón de amplitud constante.

Conclusiones

UNANCHAY
REVISTA CIENTÍFICA
ISSN 2953 6707

Recibido: 27 marzo 2024
Aprobado 29 junio 2024
Volumen 3. Número 1. Año 2024, p. 14-30

Cuando se tienen sistemas lineales representados mediante diagramas de bloque y funciones de transferencia, la presencia de un parámetro de ganancia en la trayectoria principal de lazo cerrado determina en gran medida la estabilidad absoluta del sistema. A través del criterio de estabilidad de Routh se puede conocer el rango de valores que debe tener esta ganancia para que el sistema exhiba en su salida respuestas amortiguadas o en su defecto con oscilaciones sostenidas.

El método de la ganancia límite usa básicamente el criterio de Routh, siempre y cuando se tenga información de los modelos matemáticos de los elementos del sistema, para encontrar la ganancia que produce la estabilidad marginal (máximo valor de la ganancia) en la cual tienen lugar las oscilaciones sostenidas. Esto se obtiene de suponer una expresión que contenga a la ganancia igualada a cero en la primera columna del arreglo de Routh.

En simulink de matlab se puede evaluar esta condición implementado el sistema mediante bloques funcionales donde se cargan los elementos del sistema de control a partir de sus respectivas funciones de transferencia, generadores de funciones para introducir la señal de referencia o perturbaciones y graficadores como osciloscopios virtuales propios del software para observar las respuestas o salidas del sistema.

Referencias

Ogata, K. (2003) ***"Ingeniería de Control Moderna".*** Pearson Educación. Madrid, España.

Ogata, K. (2003) ***"Ingeniería de Control Utilizando Matlab".*** Un enfoque práctico. Prentice Hall. Madrid, España.

Smith, C. (2008) ***"Control Automático de Procesos".*** Editorial Limusa. México.

Kuo, B. (1996) ***"Sistemas de Control Automático".*** Pearson Prentice Hall. Séptima Edición.

Dorf, R. y Bishop R (2005) ***"Sistemas de Control Moderno".*** Pearson Prentice Hall. Décima Edición.